

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2026.018



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



可伸缩钢筋笼灌注桩的压弯性能

周治国¹, 肖方胜², 杨军^{1,2}, 吴启明²

(1. 广州市建筑科学研究院集团有限公司, 广州 510440; 2. 广州市市政工程试验检测有限公司, 广州 510520)

摘要: 可伸缩钢筋笼灌注桩(S-PC桩)能有效克服传统钢筋混凝土灌注桩(RC桩)在受限空间中钢筋笼施工效率低、质量不稳定的问题,但该新型桩基的钢筋笼结构与常规桩基具有明显差异,其水平受力与变形机理的研究成果相对匮乏,缺少合理可靠的设计计算指导。基于ABAQUS有限元平台,建立S-PC桩三维数值模型,通过与已有试验结果对比验证模型的可靠性;系统分析S-PC桩与RC桩的压弯性能差异,分析纵筋配筋率、箍筋间距、纵筋预拉应力、混凝土强度及轴力对S-PC桩压弯性能的影响规律;针对规范《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)中相关公式预测偏差问题,提出适用于S-PC桩的开裂弯矩和极限弯矩修正计算公式。结果表明:该有限元模型能准确模拟S-PC桩的压弯力学行为;等强度配筋下,无预应力S-PC桩与RC桩的抗裂性能和压弯承载力相近,但前者延性提升约37%;轴力、纵筋配筋率和预拉应力是影响S-PC桩压弯性能的关键参数,箍筋间距和混凝土强度影响较小;修正后的开裂弯矩计算公式精度显著高于规范公式,而修正后的极限弯矩修正公式在避免求解超越方程的同时,其计算值仍有较高的准确度。

关键词: 可伸缩钢筋笼;灌注桩;压弯性能;弯矩计算;有限元分析

中图分类号: TU473.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-6717(XXXX)XX-0001-12

Compressive-flexural behavior of scalable reinforced cage cast-in-place piles

ZHOU Zhiguo¹, XIAO Fangsheng², YANG Jun^{1,2}, WU Qiming²

(1. Guangzhou Institute of Building Science Group Co., Ltd., Guangzhou 510440, P. R. China; 2. Guangzhou Municipal Engineering Testing Co., Ltd., Guangzhou 510520, P. R. China)

Abstract: The scalable reinforced cage cast-in-place pile (S-PC pile) technology effectively solves the problems of low construction efficiency and unstable quality of reinforcement cages for traditional reinforced concrete cast-in-place piles (RC piles) in confined spaces. However, the reinforcement cage structure of this new-type pile

收稿日期: 2025-12-22

基金项目: 广东省住房和城乡建设厅 2025 年科技创新计划项目(20250305K0005);广州市建筑集团有限公司科技计划项目(2024-KJ034, 2024-KJ085)

作者简介: 周治国(1972-),男,博士,教授级高级工程师,主要从事岩土工程施工技术研究, E-mail: csu_zzhg@163.com。

杨军(通信作者),男,博士,正高级工程师, E-mail: 175805466@qq.com。

Received: 2025-12-22

Foundation items: 2025 Science and Technology Innovation Plan Project of Department of Housing and Urban-Rural Development of Guangdong Province (No. 20250305K0005); Science and Technology Plan Projects of Guangzhou Construction Group Co., Ltd. (Nos. 2024-KJ034, 2024-KJ085)

Author brief: ZHOU Zhiguo (1972-), PhD, professor-level senior engineer, main research interest: geotechnical engineering construction technology, E-mail: csu_zzhg@163.com.

YANG Jun (corresponding author), PhD, senior senior engineer, E-mail: 175805466@qq.com.

foundation differs significantly from conventional ones, resulting in scarce research on its horizontal mechanical behavior and deformation mechanism, as well as a lack of reliable design and calculation guidelines. First, a three-dimensional numerical model of S-PC piles was established using the ABAQUS finite element software, and its reliability was verified by comparison with existing experimental results. Subsequently, a systematic analysis was performed to clarify the differences in compressive-flexural performance between S-PC piles and RC piles, and the influence laws of longitudinal reinforcement ratio, stirrup spacing, longitudinal reinforcement pretension stress, concrete strength, and axial force on the compressive-flexural performance of S-PC piles were explored. Finally, aiming at the prediction deviation of relevant formulas in the Code GB 50010-2010, modified calculation formulas for the cracking moment and ultimate moment applicable to S-PC piles were proposed. The results show that the established finite element model can accurately simulate the compressive-flexural mechanical behavior of S-PC piles; under equal-strength reinforcement, the crack resistance and compressive-flexural capacity of non-prestressed S-PC piles are comparable to those of RC piles, while their ductility is improved by approximately 37%; axial force, longitudinal reinforcement ratio and pretension stress are the key parameters affecting the compressive-flexural performance of S-PC piles, whereas stirrup spacing and concrete strength have minimal impacts; the precision of the revised calculation formula for the cracking moment is significantly higher than that of the code-specified formula, and the revised formula for the ultimate moment not only avoids solving the transcendental equation, but also maintains a high level of accuracy in its calculated results.

Keywords: scalable reinforced cage; cast-in-place pile; compressive-flexural behavior; moment calculation; finite element analysis

灌注桩是工程中常见的基础形式。传统的钢筋混凝土灌注桩(简称RC桩)需在施工现场进行钢筋笼绑扎作业,该工序较为繁杂,施工周期较长,并且在受限空间开展作业存在一定困难,质量控制的难度较大^[1-2]。

部分学者提出了锚杆静压桩、树根桩和旋喷复合桩等适用于受限空间的桩基础加固方法^[3-5]。然而,受施工设备性能的限制,该类桩基的桩长和桩径通常较小,单桩承载能力也相对较低。Yamanobe等^[6-7]提出了一种采用柔性钢绞线替代传统RC桩纵向钢筋,钢筋笼能纵向压缩和伸长的可伸缩钢筋笼灌注桩(Scalable Reinforced Cage Cast-in-place Piles,简称S-PC桩),其具有运输便捷、安装快速、施工效率高等显著优势。该新型桩的研究尚处于起步阶段,其力学性能尤其是受弯性能仍需进一步研究。随着计算机技术的发展,有限元数值仿真方法成为研究桩基力学性能的重要手段。借助精细化数值模型,可对一些现实中难以开展的桩基试验进行仿真模拟,推测桩基在复杂工况下的力学行为和损伤规律^[8-10]。此外,针对S-PC桩这一新型结构,现行规范《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[11]和《建筑基坑支护技术规程》(JGJ 120—2012)^[12]中开裂弯矩和极限弯矩的预测存在较大偏差,亟须修正和完善。

笔者基于ABAQUS有限元平台,建立了S-PC

桩的三维数值模型,通过与已有试验结果对比验证模型的可靠性。在此基础上,系统研究S-PC桩与RC桩的压弯性能差异,分析纵筋配筋率、箍筋间距、纵筋预拉应力及混凝土强度等关键参数对S-PC桩压弯性能的影响规律。最后针对现有规范公式的不足,提出了适用于S-PC桩的开裂弯矩和极限弯矩修正计算公式。

1 有限元模型建立及校验

1.1 S-PC桩简介

普通钢筋笼由同心布置的纵向钢筋与螺旋箍筋通过焊接方式固定组合而成,其无法沿纵向进行压缩与伸展,亦难以对纵筋施加预应力。S-PC桩的纵向钢筋采用柔性钢绞线制作而成,箍筋采用常规环形钢筋,二者借助专门设计的活动夹具实现连接。钢绞线与箍筋能够在90°夹角范围内自由旋转,从而实现纵向钢绞线的扭转收缩与垂直伸展^[13]。图1(a)、(b)分别为可伸缩钢筋笼处于旋转收缩状态和竖向伸展状态下的照片。钢筋笼伸展后浇筑混凝土,然后通过后张法施加预应力,除两端锚固段外,钢绞线与混凝土之间无黏结。

1.2 有限元模型

为研究S-PC桩的压弯承载性能,采用ABAQUS建立S-PC桩的有限元模型。建立的S-PC桩有限元模型如图2所示,桩长6 m,桩径1.2

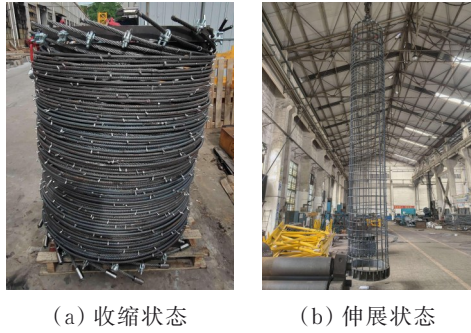


图 1 可伸缩钢筋笼照片

Fig.1 Scalable reinforced cage

m。由于 S-PC 桩钢筋笼具有可伸缩的特性,其纵筋采用柔度较大的钢绞线,其力学性能与常规预应力钢绞线有较大区别,经材料试验得到该柔性钢绞线的力学性能参数(屈服/极限强度 803/1 560 MPa,弹性模量 180 GPa)。纵向钢筋采用 20 根名义直径 15.2 mm 的柔性钢绞线(采用 7 股捻制工艺,每股直径为 5.0 mm,公称截面积为 140 mm²)。每根钢绞线的张拉控制应力为 714 MPa。该取值参考《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)的要求,张拉控制应力不超过钢绞线极限强度的 75%,且不小于极限强度的 40%,兼顾了施工安全性与预应力施加效果,避免钢绞线发生过度张拉或塑性变形。箍筋采用直径 14 mm 的 HRB400 钢筋,箍筋间距 100 mm,混凝土强度等级为 C35。

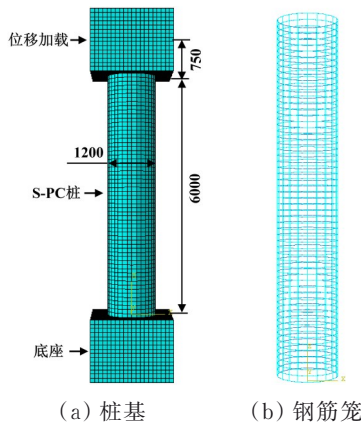


图 2 有限元模型及网格划分(单位:mm)

Fig.2 Finite element models and mesh generation

该模型采用八节点三维实体单元(缩减积分) C3D8R 模拟混凝土,采用三维两节点桁架单元 T3D2 模拟钢筋(包括箍筋和预应力钢绞线)。模型中钢筋笼通过 embedded 处理方式嵌入混凝土中,不考虑钢筋与混凝土之间的黏结滑移。模型中底座施加对应的位移约束以固定底座,忽略土体对桩的作用。为确保求解过程的收敛,在桩顶施加单调水平位移。经试算,单元网格尺寸为 100 mm 时能兼

顾结果精确度和计算效率,因此模型的单元网格尺寸设置为 100 mm。

1.3 材料模型

对于混凝土材料,采用《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[11]中的混凝土单向受拉和受压应力-应变曲线定义混凝土的本构关系,并采用混凝土损伤塑性模型(CDP)模拟混凝土,该模型通过各向同性损伤与拉压塑性相结合来描述混凝土的塑性行为,可以模拟混凝土的累积损伤。模型的其他参数参考相关研究^[14-15]确定,取膨胀角 $\psi=30^\circ$,偏移量参数 $e=0.1$,双轴与单轴受压屈服应力比 $\sigma_{bo}/\sigma_{co}=1.16$,屈服常数 $K=0.667$,黏性系数 $\mu=0.005$,混凝土损伤参数按式(1)、式(2)计算。

$$d_c = 1 - \sqrt{\sigma_c / (E_0 \epsilon_c)} \quad (1)$$

$$d_t = 1 - \sqrt{\sigma_t / (E_0 \epsilon_t)} \quad (2)$$

式中: d 为损伤因子; E_0 为混凝土的弹性模量; σ 为应力; ϵ 为应变;下标 c 和 t 分别表示压缩和拉伸。

对于箍筋和预应力钢绞线材料,采用理想弹塑性模型模拟其弹性和应变硬化阶段。为考虑受拉损伤作用下钢绞线的强度和刚度退化,损伤阶段由延性金属损伤模型定义,其中的关键参数如断裂应变、应力三轴度、应变率以及破坏位移分别设置为 0.1、0.8、0.000 52 以及 30 mm。采用“降温法”施加预应力,在场定义中设置初始温度场和钢筋的热膨胀系数,由于钢绞线的热膨胀系数与温度变化相关,降温过程会引起钢绞线的收缩,从而在钢绞线中施加预应力。根据式(3)可计算出需要设置的温度。

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T \quad (3)$$

式中: α 为钢绞线膨胀系数,取 $\alpha=1.2 \times 10^{-5}$, E 为钢绞线弹性模量, ΔT 为设置的温度变化。

1.4 模型校验

根据 Yamanobe 等^[7]开展的可伸缩钢筋笼灌注桩低周往复试验建立相应的有限元模型。该试验共制作了 2 根几何尺寸和钢筋配置相同的桩,桩径 0.85 m,剪切跨度 2.67 m,且均在轴向加载 2 MPa 的预压力。试验采用拟静力加载系统,加载装置由门型框架构成,通过反力墙上经联轴器安装的千斤顶施加水平荷载。竖向荷载方面,为使试验体能够跟随水平变形与旋转变形,通过加载梁上经滑动支座和球铰安装的千斤顶施加轴力。试验采用水平低周往复加载,轴向施加 2 MPa 恒定预压力。水平加载则是根据材料强度试验结果计算出最外边缘钢材屈服时的荷载作为屈服荷载,先以该屈服荷载的 1/2 为荷载值,在正、负方向进行 1 次循环加载后加载至屈服荷载,将此时实测的位移定为屈服位

移 δy ,之后以该屈服位移的整数倍分级加载,每级位移进行3次往复循环。当钢绞线发生断裂,或加载荷载降至降伏荷载的80%左右时,停止加载。

该试验桩试件的几何尺寸与钢筋布置图如图3所示,其中钢绞线未施加预应力的桩命名为S-PC-J1,施加预应力的桩命名S-PC-J2,具体参数及所用材料的强度数据列于表1中。

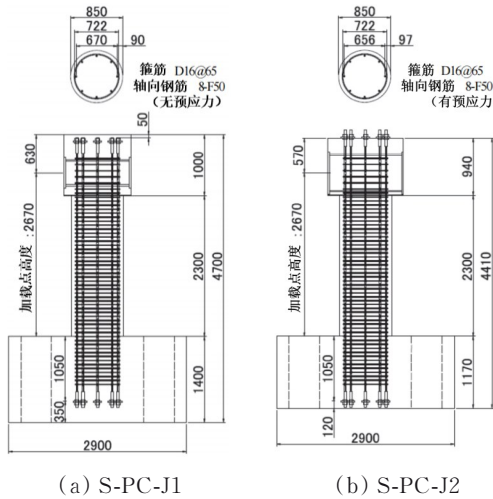


图3 Yamanobe等^[7]试验桩的几何尺寸与钢筋配置(单位:mm)
Fig.3 Geometric dimensions and reinforcement details of test piles by Yamanobe et al.^[7]

有限元模型的几何尺寸及加载条件均与试验相同。通过数值分析得到桩的水平荷载-位移骨架曲线,并与试验测得的曲线对比,如图4所示。由图4可见,试验与数值仿真的桩顶水平荷载-位移关系表现一致,曲线吻合良好,峰值荷载的误差均控制在10%以内。此外,通过损伤对比可以发现,数值仿真能够较好地重现预应力钢绞线桩的损伤破坏情况,如图5所示。图6进一步给出了降温法施加的钢绞线预拉应力和混凝土预应力的分布。由图6可以看出,钢绞线预拉应力在780 MPa左右,混凝土应力值在3.0 MPa左右,与试验结果接近。

2 桩基压弯承载性能分析

2.1 S-PC桩与RC桩压弯承载性能对比

为了与传统RC桩进行压弯承载性能对比,建立等强配筋下的RC桩有限元模型,即预应力钢绞

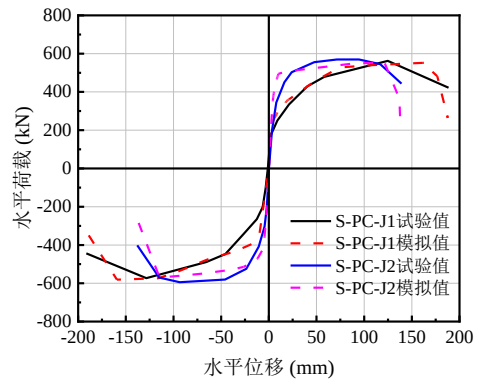


图4 试验^[7]与仿真水平荷载-位移骨架曲线对比
Fig.4 Comparison of experimental^[7] and simulation load-displacement skeleton curves

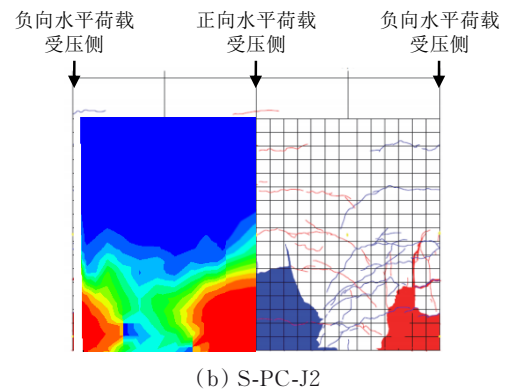
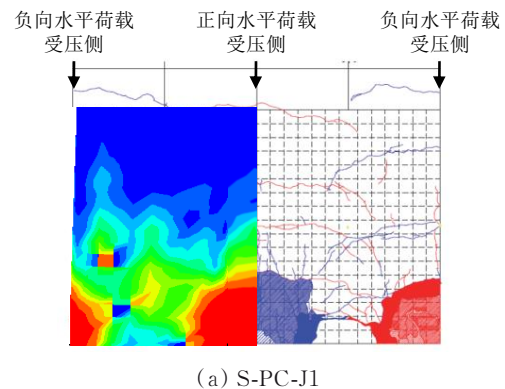


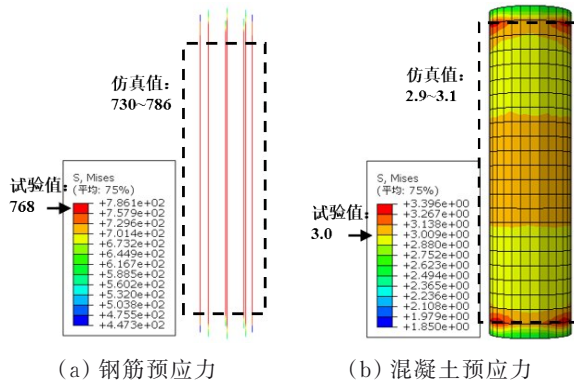
图5 试验^[7]与仿真损伤对比
Fig.5 Experimental^[7] and simulation damage comparison

线替换为20根直径22 mm的HRB400钢筋,并将建立的S-PC桩命名为S-PC-1,无预应力的相同S-PC桩命名为S-PC-0,RC桩命名为RC-0。图7展示了RC-0和S-PC-0试件破坏时的混凝土和钢筋应力云图。由图7可以看出:两个试件破坏时,桩底部受压

表1 试件几何参数与材料强度^[7]

Table 1 Geometric Parameters and Material Strength of Specimens^[7]

试验桩	桩径/mm	剪跨比	轴向钢筋(预应力钢绞线)					箍筋配置/箍筋配筋率	混凝土抗压强度/MPa	轴压荷载/kN	混凝土预应应力水/MPa
			根数×型号	配置直径/mm	横截面面积/mm ²	屈服/抗拉强度/MPa	配筋率/%	预拉应力/MPa			
S-PC-J1	850	3.5	8×F35	670	277.1	1 725/1934	0.391	0	42.8	1 134.9	0
S-PC-J2	850	3.5	8×F35	656	277.1	1 725/1934	0.391	768.0	47.5	1 134.9	3.0

图6 试验^[7]与仿真预应力水平对比(单位:MPa)Fig.6 Experimental^[7] and simulation prestress level comparison

侧混凝土被压碎,同时纵筋均达到屈服强度,发生适筋破坏,表明等强配筋下的S-PC桩与传统RC桩破坏模式相同。

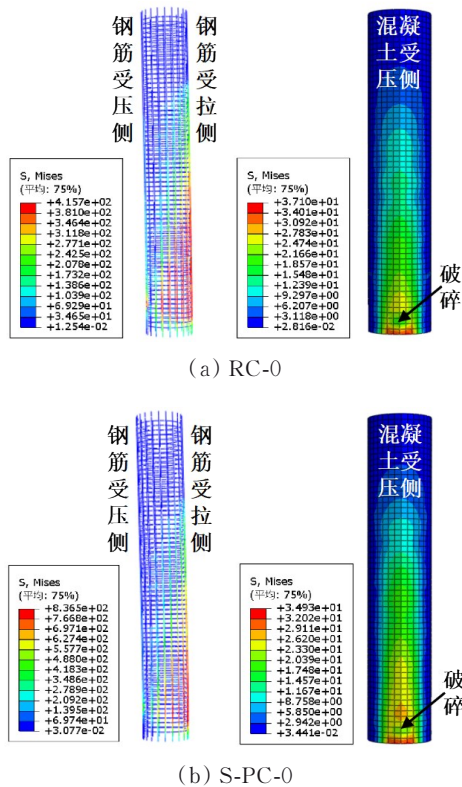


图7 试件破坏时混凝土与钢筋的应力云图

Fig.7 Stress cloud diagram of concrete and steel reinforcement at specimen failure

将S-PC-0、S-PC-1与RC-0试件的水平荷载-位移曲线绘于图8中(图中A点对应试件开裂;B点为屈服点,由能量等效法^[16]确定;C点为破坏点)。从图8可以看出:加载初期,各试件位移随水平荷载增大呈线性增长趋势;开裂后,曲线的斜率明显减小,变形加快。根据水平荷载-位移曲线,可以看出S-PC桩与RC桩的受力过程类似,大致可分为3个阶

段:1)弹性阶段,对应曲线的OA段。加载至开裂前,试件处于全截面受力状态,位移随水平荷载的增加而线性增大。2)带裂缝工作阶段,对应曲线的AB段。随着第1条裂缝出现,裂缝处混凝土退出工作,试件截面刚度降低,曲线出现明显转折;水平荷载继续增加,桩身裂缝不断发展,曲线表现出明显的非线性特征。3)破坏阶段,对应曲线的BC段。试件屈服后继续加载,纵向钢筋逐渐达到极限强度,曲线非线性愈加明显,直至试件底部受压区混凝土应变达到极限压应变而压碎,即试件破坏。

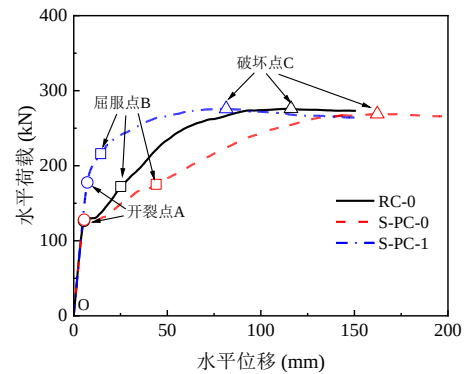


图8 S-PC-1与RC-0试件的水平荷载-位移曲线

Fig.8 Load-displacement curves of specimens S-PC-1 and RC-0

依据仿真结果,将各试件的开裂弯矩 M_{cr} 、极限弯矩 M_u 以及延性系数 μ (极限位移 Δ_u 和开裂位移 Δ_{cr} 之比)列于表2中。分析图8和表2可见:

1)等强度配筋下无预应力S-PC桩和RC桩的抗裂性能和压弯承载能力差异不大,具体表现为S-PC-0和RC-0试件的开裂弯矩和极限弯矩基本相同。然而,前者的延性高于后者,S-PC-0试件的延性系数较RC-0试件提高约37%。

2)相比于无预应力的S-PC桩和RC桩,施加预应力的S-PC桩的压弯承载能力基本不变,抗裂性能明显提高。由于S-PC-1桩的混凝土具有初始预压力,受拉区混凝土开裂被推迟,S-PC-1试件的开裂弯矩较S-PC-0和RC-0试件提高了约40%。然而,S-PC-1试件的延性系数明显小于S-PC-0和RC试件,表明施加预应力S-PC桩的抗裂性能提高是以塑性变形和耗能能力减小为代价的。

2.2 参数影响分析

为了研究不同纵筋配筋率、箍筋间距、纵筋预应力、混凝土强度以及轴力等因素对S-PC桩压弯承载能力的影响,根据工程经验选取预应力钢筋直径分别为9.5、12.7、15.2、17.8、21.6 mm,箍筋间距分别为100、150、200 mm,纵筋预拉力分别为50、100、150 kN,混凝土强度等级分别为C25、C35、C45和C55,轴压(拉)比分别为0.2、0.4(轴压工况),

表 2 S-PC-0、S-PC-1 与 RC-0 试件的仿真结果

Table 2 Simulation results of specimens S-PC-0, S-PC-1 and RC-0

试件编号	开裂弯矩 $M_{cr}/(\text{kN}\cdot\text{m})$	开裂位移 Δ_{cr}/mm	极限弯矩 $M_u/(\text{kN}\cdot\text{m})$	极限位移 Δ_u/mm	延性系数 μ
RC-0	853.3	5.5	1 863.3	116.1	21.11
S-PC-0	864.2	5.6	1 814.8	162.2	28.96
S-PC-1	1 199.6	7.2	1 861.6	81.5	11.32

-0.2、-0.4(轴拉工况)。仿真计算分组及对应的结果见表 3。除上述控制变量外,其他参数不变。

表 3 数值计算工况与结果

Table 3 Numerical calculation working conditions and results

试件名称	预应力钢筋 直径/mm	箍筋间距/ mm	纵筋预拉力/ kN	混凝土强度 等级	轴压比	开裂弯矩 $M_{cr}/$ ($\text{kN}\cdot\text{m}$)	极限弯矩 $M_u/$ ($\text{kN}\cdot\text{m}$)	延性系数 μ
S-PC-A1	12.7	100	100	C35	0	1 157.1	1 586.9	11.06
S-PC-A2	17.8	100	100	C35	0	1 211.7	2 280.2	16.18
S-PC-A3	9.5	100	100	C35	0	921.4	1 041.5	
S-PC-A4	21.6	100	100	C35	0	1 231.9	2 749.3	15.95
S-PC-B1	15.2	150	100	C35	0	1 199.2	1 868.3	11.15
S-PC-B2	15.2	200	100	C35	0	1 197.2	1 858.3	10.84
S-PC-C1	15.2	100	50	C35	0	1 016.9	1 798.1	18.79
S-PC-C2	15.2	100	150	C35	0	1 320.0	1 920.8	7.60
S-PC-D1	15.2	100	100	C25	0	1 169.1	1 774.7	9.82
S-PC-D2	15.2	100	100	C45	0	1 212.1	1 906.2	12.13
S-PC-D3	15.2	100	100	C55	0	1 266.0	1 932.7	14.76
S-PC-E1	15.2	100	100	C35	0.2	2 657.5	4 273.4	3.65
S-PC-E2	15.2	100	100	C35	0.4	3 960.9	5 381.1	2.09
S-PC-E3	15.2	100	100	C35	-0.035	986.8	1 282.5	20.77
S-PC-E4	15.2	100	100	C35	-0.07	378.0	679.0	2.54

2.2.1 纵筋配筋率的影响

图 9 给出了不同预应力钢绞线直径试件达到极限水平荷载时钢绞线的应力分布。其中,S-PC-1、S-PC-A1 和 S-PC-A2 试件发生适筋破坏,受拉一侧的预应力钢绞线部分进入屈服阶段,如图 9(a)、(b)和(c)所示。S-PC-A3 试件发生少筋破坏,即在受压区混凝土达到极限压应变前,受拉一侧的预应力钢绞线沿桩全长进入屈服阶段,该试件失去承载能

力,如图 9(d)所示。S-PC-A4 试件发生超筋破坏,预应力钢绞线在受压区混凝土达到极限压应变时尚未达到屈服强度,如图 9(e)所示。结合表 3 中数据可以发现,当钢绞线配筋率合适时,S-PC 桩的延性随着钢绞线直径的增加而提高,但超过一定限度后其延性反而有所降低,如超筋布置的 S-PC-A4 试件的位移延性系数小于适筋布置的 S-PC-A2 试件。

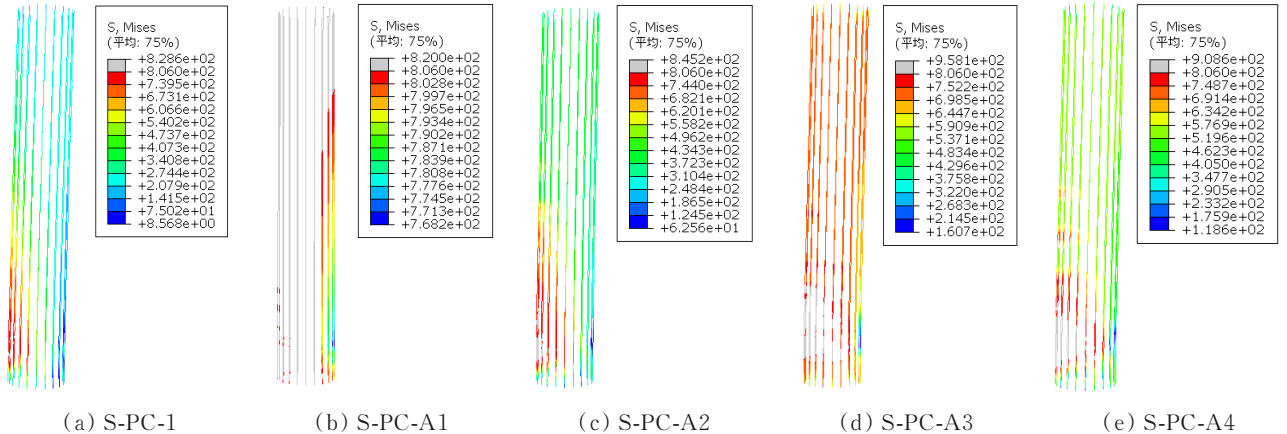


图 9 各试件达到极限水平荷载时钢绞线的应力分布

Fig.9 Stress distribution of steel strands in all specimens at the ultimate load

不同预应力钢绞线直径试件的水平荷载-位移曲线如图 10(a)所示。结合表 3 可以看出,随着预应力钢绞线直径的增加,S-PC 桩的压弯承载力有较为明显的提高,抗裂性能虽有提升但不显著。具体表现为:当预应力钢绞线直径从 12.7 mm 增大至 21.6 mm 时,预应力钢绞线横截面积和桩的纵筋配筋率增大了 1.89 倍,S-PC 桩的极限弯矩增加了 73%,而开裂弯矩仅增加了 6%。

2.2.2 箍筋间距的影响

不同箍筋间距试件的水平荷载-位移曲线如图 10(b)所示。从图 10(b)不难看出,S-PC 桩的抗裂性能、压弯承载性能和延性基本不受到箍筋间距的影响,S-PC-1、S-PC-B1 和 S-PC-B2 试件的开裂弯矩、极限弯矩以及延性系数差异不大。其主要原因是箍筋主要起到约束纵筋的作用,防止纵筋在压弯受压区发生压屈失稳,对桩抗裂性能和压弯承载力的直接影响有限。

2.2.3 纵筋预拉力的影响

不同纵筋预拉力试件的水平荷载-位移曲线如图 10(c)所示。结合图 10(c)和表 3 可以发现,增大纵筋预拉力可以提高 S-PC 桩的抗裂性能,压弯承载力虽亦有提高但相对不明显。例如,当纵筋预拉力从 50 kN 增大至 150 kN 时,桩的开裂弯矩增加了 10%,而极限弯矩仅增加了 3%。另一方面,增大纵筋预拉力使得桩的延性显著降低,其原因在于:增大预应力会使构件受拉区预应力纵筋初始应力更高,桩开裂后裂缝快速扩展且钢筋迅速屈服,破坏前缺乏塑性变形缓冲,即桩抗裂性能的提高是以塑性变形和耗能能力减小为代价的。

2.2.4 混凝土强度的影响

不同纵筋预拉力试件的水平荷载-位移曲线如图 10(d)所示。结合图 10(d)和表 3 可以看出,随着混凝土强度的提高,S-PC 桩的抗裂性能与压弯承载力虽有所提高,但该提高将愈发不明显。例如,当混凝土强度从 25 MPa 增大至 35 MPa 时,开裂弯矩和极限弯矩分别增加了 2.6% 和 4.9%;当混凝土强度从 35 MPa 增大至 45 MPa 时,开裂弯矩和极限弯矩仅分别增加了 1.0% 和 2.4%。因此,当需要提

高 S-PC 桩的压弯承载能力时,提高混凝土强度并非优先考虑的措施,尤其是已采用了较高的混凝土强度时。

2.2.5 轴力的影响

不同轴压(拉)比试件的水平荷载-位移曲线如图 10(e)所示。结合图 10(e)和表 3 可以看出,随着轴压比的提高(0 提高至 0.4),S-PC 桩的抗裂性能和压弯承载力显著增大(开裂弯矩和极限弯矩分别提高 2.30 倍和 2.89 倍),同时延性显著降低(延性系数降低 82%)。另一方面,随着轴拉比的提高,S-PC 桩的开裂弯矩和极限弯矩逐渐减小,但延性呈现出先增大后减小的趋势。其原因在于:S-PC-E3 试件为适筋破坏,在桩轴向提供少量拉力增大了受压区混凝土破碎时所需的水平位移,而 S-PC-E4 发生少筋破坏,桩受拉区纵筋提前进入屈服阶段从而加快了其破坏速度。

2.2.6 各因素影响程度对比

极差分析是正交试验设计中常用的一种简便直观的数据分析方法,核心目的是通过计算各因素不同水平下试验指标的极差,判断因素对指标的影响主次顺序。极差 R 越大,该因素的不同水平对试验指标的影响越显著。表 4 给出了试验指标分别为开裂弯矩 M_{cr} 、极限弯矩 M_u 和延性系数 μ 时各因素的极差。从表 4 可以看出:在 5 种影响因素中,轴力对开裂弯矩 M_{cr} 、极限弯矩 M_u 及延性系数 μ 的影响程度均最显著;纵筋配筋率和预拉力对开裂弯矩 M_{cr} 及延性系数 μ 的影响程度大于箍筋间距和混凝土强度等级;对于极限弯矩 M_u ,箍筋间距的影响程度远小于其他四者。故综合而言,轴力、纵筋配筋率和预拉力对 S-PC 桩的压弯性能影响显著,箍筋间距和混凝土强度等级的影响相对较小。

3 桩基开裂弯矩与极限弯矩计算

《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[11]给出了混凝土截面开裂弯矩和极限弯矩的计算公式,然而 S-PC 桩的混凝土和钢绞线在压弯时的力学行为与规范中的假设有一定差异,导致预估值与实际值相差较大。因此,基于 S-PC 桩混凝土和钢

表 4 各影响因素的极差 R
Table 4 Range of each influencing factor

因素	M_{cr} 的极差 $R_1/(\text{kN}\cdot\text{m})$	M_u 的极差 $R_2/(\text{kN}\cdot\text{m})$	μ 的极差 R_3
纵筋配筋率	310.5	1 707.8	16.18
箍筋间距	31.8	29.5	0.97
纵筋预拉力	303.1	122.7	11.19
混凝土强度等级	109.1	158.0	4.94
轴力	3 582.9	4 702.1	18.23

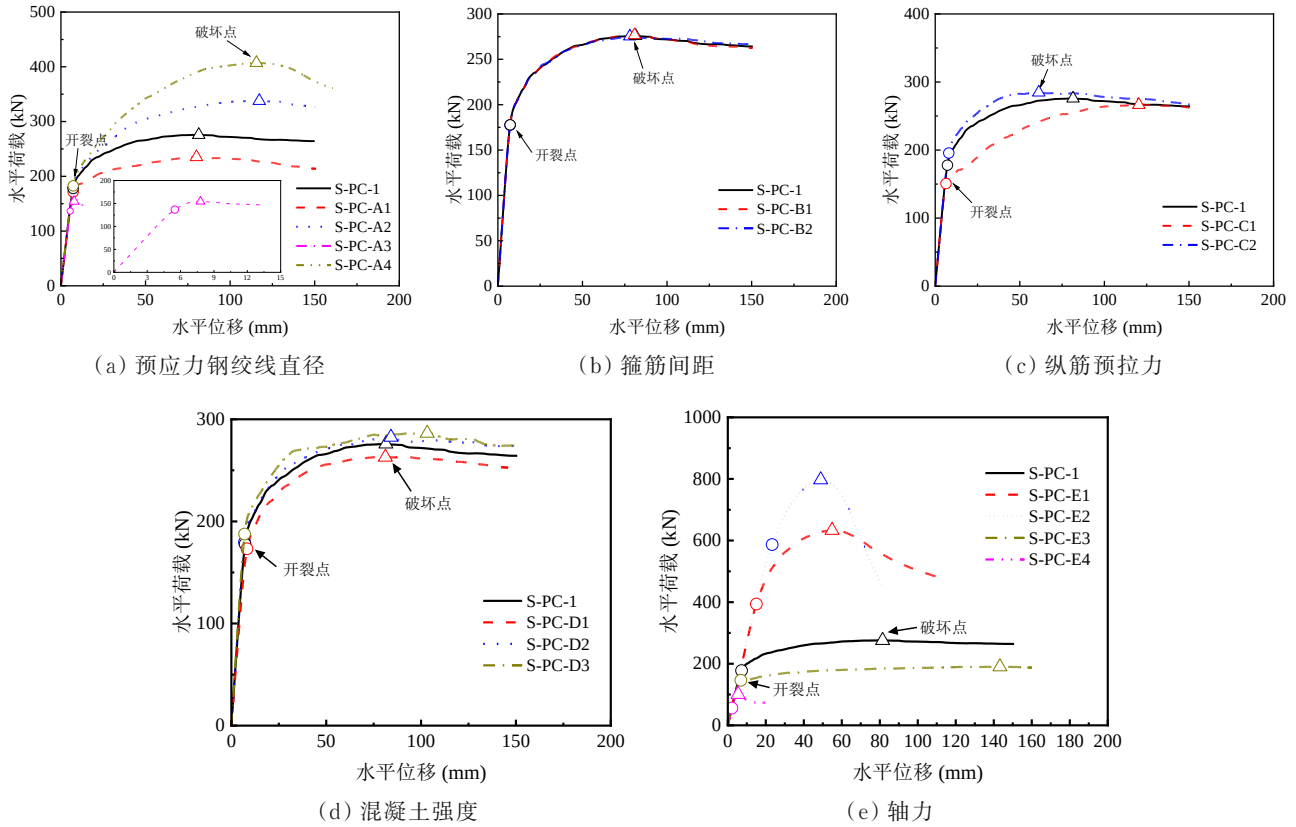


图 10 不同影响因素下试件的水平荷载-位移曲线

Fig.10 Load-displacement curves of specimens under different influencing factors

绞线的受力特性对规范公式进行修正。

3.1 开裂弯矩

根据《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[11],考虑到受拉混凝土的塑性性能对抗裂承载力的影响,预应力钢筋混凝土构件的开裂弯矩 M_{cr} 计算式如式(4)所示。

$$M_{cr} = (\sigma_{pc} + \gamma f_t) W_0 \quad (4)$$

$$W_0 = \frac{1}{4D} \left[\frac{\pi}{8} D^4 + (\alpha_E + 1) A_p D_p^2 \right] \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{M_{cr}}{M_e} \quad (6)$$

$$M_e = \frac{\pi R^3}{4} f_t \quad (7)$$

式中: σ_{pc} 为混凝土由钢绞线预应力与外荷载轴向力共同引起的验算边缘法向应力; γ 为混凝土截面抵抗矩塑性影响系数, $\gamma = (0.7 + 120/h)\gamma_m$, 其物理含义为 $\sigma_{pc} = 0$ 时的截面开裂弯矩 M_{cr} 与弹性极限弯矩 M_e 的比值(式(6)), 其中弹性极限弯矩 M_e 为混凝土全截面处于弹性阶段且最外纤维应力达到混凝土抗拉强度时的截面弯矩(式(7)); h 为截面高度, mm, 对于圆形截面取 $h = D$ (D 为桩的直径), 且 $400 \leq h \leq 1600$; γ_m 为混凝土构件的截面抵抗矩塑性影响系数基本值; f_t 为混凝土抗拉强度; W_0 为构件换算截面受拉边缘的弹性抵抗矩, 根据圆形截面抵抗矩

的计算公式, 考虑纵筋的折算面积后, 截面的抵抗矩可按式(5)计算, 式中 D_p 为纵筋所在圆周的直径, A_p 为纵筋总面积, α_E 为纵筋与混凝土的弹性模量之比。

需要指出的是,《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[11]按正截面应变保持平面的假定, 并取受拉区混凝土应力图形为梯形、受拉边缘混凝土极限拉应变由 $2f_t/E_c$ 确定, 从而得出圆形截面 $\gamma_m = 1.6$ 。根据常用灌注桩的规格, D 通常介于 0.8~2.0 m, 代入上面的算式可得 $\gamma = 1.22 \sim 1.36$ 。然而, 规范中对于受拉区混凝土的应力分布过于保守, 与真实混凝土的本构关系相差较大, 导致开裂弯矩计算值通常明显偏小。为更准确地估算混凝土截面的开裂弯矩, 现假设混凝土轴心受拉应力应变曲线如图 11(a) 所示, 其中上升段和下降段均为直线, 极限拉应变 $\epsilon_{cr} = 2\epsilon_p = 2f_t/E_c$, 下降段斜率 E_t 与上升段斜率 E_0 的关系 $E_t/E_0 = 1 - 2/(0.312f_t^2 + 2)^{[17]}$ 。相应地, 纯弯曲的圆形截面素混凝土梁在极限状态下, 截面上应力与应变分布见图 11(b)。

如图 11(b) 所示, 以圆形截面的圆心为原点建立坐标轴, 水平向为 x 轴, 竖向为 y 轴且受压区为正方向, 因此受压区边缘对应的 y 轴坐标为 R (R 为圆形截面的半径), 受拉区边缘对应的 y 轴坐标为 $-R$ 。

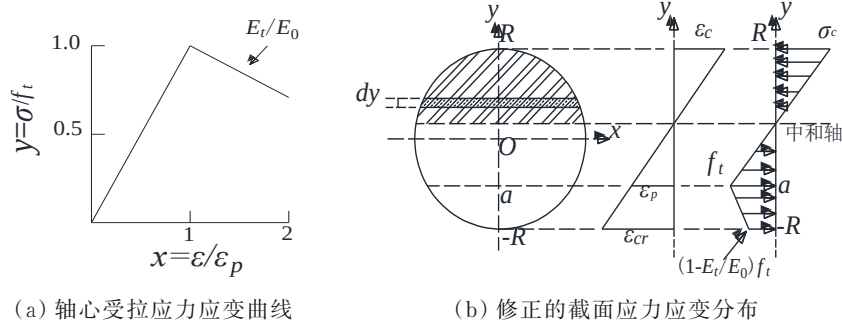


图 11 混凝土开裂弯矩计算简图

Fig.11 Concrete cracking moment calculation diagram

假设受拉区中应力达到抗拉强度 f_t 位置对应的 y 轴坐标为 a ,则截面沿 y 轴的应力分布函数可写为式(8)。截面高度增量 dy 对应的截面积增量 $dA = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$,对截面积分可计算截面轴力和弯矩。根据截面轴力平衡条件(9),将式(8)代入即可求解 a ,式(9)中 N_0 为外荷载施加的轴力。然后,将 a 代入式(10)可计算得到截面开裂弯矩 M_{cr} 。借助

MATLAB软件联立求解上述各式并计算混凝土截面抵抗矩塑性影响系数 γ ,发现 γ 基本仅与混凝土强度相关, γ 的计算值列于表5中,其间可通过线性插值确定。因此,S-PC桩的开裂弯矩计算可采用表5中修正后的系数 γ' 替代规范公式(4)中的 γ ,即式(11)。

$$\sigma_{cr}(y) = \begin{cases} -\frac{f_t}{a+R}y + \frac{2a+R}{a+R}f_t, & a \leq y \leq R \\ \frac{1}{a+R}\frac{E_t}{E_0}y - \frac{a}{a+R}\frac{E_t}{E_0}f_t + f_t, & -R \leq y < a \end{cases} \quad (8)$$

$$N = \iint \sigma_{cr}(y) dA = N_0 \quad (9)$$

$$M_{cr} = \iint y \sigma_{cr}(y) dA \quad (10)$$

$$M_{cr} = (\sigma_{pc} + \gamma' f_t) W_0 \quad (11)$$

$$N = \alpha \alpha_1 f_c A \left(1 - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \right) + (\alpha - \alpha_1) f_y A_s = N_0 \quad (13)$$

$$\alpha_1 = 1.25 - 2\alpha \quad (14)$$

表 5 修正后的混凝土截面抵抗矩塑性影响系数 γ'

Table 5 Modified concrete section modulus plastic influence coefficient

混凝土强度等级	f_t/MPa	γ'
C25	2.58	1.449
C30	2.80	1.433
C35	3.01	1.420
C40	3.22	1.407
C45	3.38	1.398
C55	3.60	1.387

3.2 极限弯矩

根据《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[1],沿周边均匀配置纵筋的圆形截面钢筋混凝土构件,其正截面极限弯矩可按式(12)计算。

$$M_u = \frac{2}{3} \alpha_1 f_c A R \frac{\sin^3(\pi\alpha)}{\pi} + f_y A_s R_s \frac{\sin(\pi\alpha) + \sin(\pi\alpha_1)}{\pi} \quad (12)$$

式中: f_c 为混凝土抗压强度,当混凝土强度等级不超过C50时, α_1 取1.0,当混凝土强度等级为C80时, α_1 取0.94,其间按线性内插法确定; A 为混凝土截面面积; R 为截面半径; f_y 为纵筋屈服强度; A_s 为全部纵筋的截面面积; R_s 为纵筋重心所在圆周的半径; α 、 α_1 分别对应于受压区混凝土截面面积的圆心角(rad)与 2π 的比值、受拉纵筋截面面积与全部纵筋截面面积的比值,如图12(a)所示。 α 、 α_1 可根据轴力平衡条件式(13)和关系式(14)联立求得。

需要指出的是,式(12)~(14)是基于图12(a)中所示的简化应力分布得到,即不考虑混凝土的抗拉强度,受压区混凝土应力简化为等效矩形应力图,受压及受拉纵筋应力亦简化为等效矩形应力图。然而,当纵筋所用材料具有明显强化段、强屈比(抗拉强度 f_u 与屈服强度 f_y 之比)较大时,截面破坏时受压及受拉区边缘纵筋的应力可能已明显大于屈服强度,按上述假设采用屈服强度计算得到的截面极限弯矩可能偏小。基于此提出如图12(b)所示的假设,即受压纵筋 $\pi\alpha$ 圆心角以及受拉纵筋 $\pi\alpha_1$ 圆心角范围内的应力大小为 $(f_y + f_u)/2$,其余不变。

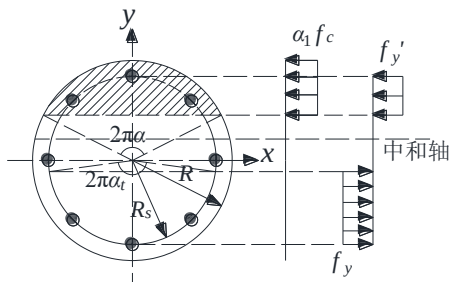
相应地,修正后的截面极限弯矩和轴力计算如式(15)和(16)所示。为避免求解超越方程,采用文献^[18]中推荐的式(17)计算 a ,然后根据轴力平衡条件式(16)计算 a_i ,最后将 a 、 a_i 代入式(15)即可计算截面极限弯矩 M_u 。

$$M_u = \frac{2}{3} \alpha_1 f_c A R \frac{\sin^3(\pi\alpha)}{\pi} + f_y A_s R_s \frac{\sin(\pi\alpha) + \sin(\pi\alpha_i)}{\pi} + \frac{f_u - f_y}{2} A_s R_s \frac{\sin(\pi\alpha/2) + \sin(\pi\alpha_i/2)}{\pi} \quad (15)$$

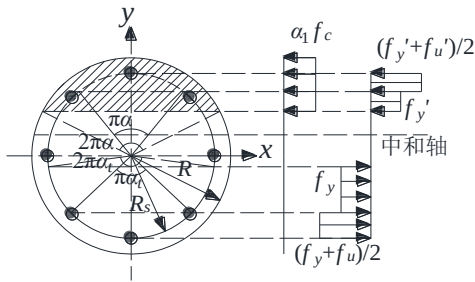
$$N = \alpha \alpha_1 f_c A \left(1 - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \right) + (\alpha - \alpha_i) \left(\frac{3f_y + f_u}{4} \right) A_s = N_0 \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{n + 1.85\lambda_1 + 0.73\lambda_h + 0.36}{3.71\lambda_1 + 3.17\lambda_h + 1.46} \quad (17)$$

式中: n 为桩的轴压比, $n=N_0/Af_c$; λ_1 为纵筋配筋特征值, $\lambda_1=f_y A_s/Af_c$; λ_h 为配箍特征值, $\lambda_h=4A_{sp}f_y h/d_s s_y f_c$; A_{sp} 为箍筋截面积; f_y 为箍筋屈服强度; d_s 为箍筋所在圆周的直径, s_y 为箍筋间距。



(a) 规范简化截面应力应变分布



(b) 修正的截面应力应变分布

图 12 混凝土极限弯矩计算简图

Fig.12 Concrete ultimate moment calculation diagram

3.3 修正公式算例验证

为验证式(11)和式(15)对 S-PC 桩的适用性,将发生适筋破坏的 13 根 S-PC 桩试件的仿真结果、文献^[7]中 2 根 S-PC 桩试件的试验结果进行对比分析,计算结果列于表 6 和表 7 中,其中 $M_{cr,i}$ 和 $M_{u,i}$ 分别为开裂弯矩和极限弯矩的仿真/试验结果, $M_{cr,1}$ 和

$M_{u,1}$ 为采用规范公式(4)和(12)的计算结果, $M_{cr,2}$ 和 $M_{u,2}$ 为采用修正公式(11)和(15)的计算结果。

表 6 开裂弯矩的修正公式、规范公式计算值与仿真/试验结果对比

Table 6 Comparison of modified formulas, calculated values of code formulas, and simulation/experimental results for cracking moment

试件编号	$M_{cr,i}/$ (kN·m)	$M_{cr,1}/$ (kN·m)	$M_{cr,2}/$ (kN·m)	$\frac{M_{cr,1}}{M_{cr,i}}$	$\frac{M_{cr,2}}{M_{cr,i}}$
S-PC-0	864.2	671.6	745.1	0.78	0.86
S-PC-1	1 199.6	980.2	1 053.6	0.82	0.88
S-PC-A1	1 157.1	972.2	1 045.1	0.84	0.90
S-PC-A2	1 211.7	989.9	1 064.1	0.82	0.88
S-PC-B1	1 199.2	980.2	1 051.9	0.82	0.88
S-PC-B2	1 197.2	980.2	1 051.9	0.82	0.88
S-PC-C1	1 016.9	825.0	898.5	0.81	0.88
S-PC-C2	1 320.0	1 133.6	1 207.0	0.86	0.91
S-PC-D1	1 169.1	884.8	960.9	0.76	0.82
S-PC-D2	1 212.1	1 062.7	1 132.2	0.88	0.93
S-PC-D3	1 266.0	1 111.8	1 179.0	0.88	0.93
S-PC-E1	2 657.5	2 516.4	2 604.2	0.95	0.98
S-PC-E3	986.8	931.5	1 024.0	0.94	1.04
S-PC-J1 ^[7]	432.5	386.7	411.7	0.89	0.95
S-PC-J2 ^[7]	638.1	572.4	608.1	0.90	0.95

表 7 极限弯矩的修正公式、规范公式计算值与仿真/试验结果对比

Table 7 Comparison of modified formulas, calculated values of code formulas, and simulation/experimental results for ultimate moment

试件编号	$M_{u,i}/$ (kN·m)	$M_{u,1}/$ (kN·m)	$M_{u,2}/$ (kN·m)	$\frac{M_{u,1}}{M_{u,i}}$	$\frac{M_{u,2}}{M_{u,i}}$
S-PC-0	1 814.8	1 477.4	1 821.5	0.81	1.00
S-PC-1	1 861.6	1 477.4	1 821.5	0.79	0.98
S-PC-A1	1 586.9	1 059.2	1 385.9	0.67	0.87
S-PC-A2	2 280.2	1 973.4	2 382.6	0.87	1.04
S-PC-B1	1 868.3	1 477.4	1 821.5	0.79	0.97
S-PC-B2	1 858.3	1 477.4	1 821.5	0.8	0.98
S-PC-C1	1 798.1	1 477.4	1 821.5	0.82	1.01
S-PC-C2	1 920.8	1 477.4	1 821.5	0.77	0.95
S-PC-D1	1 774.7	1 443.6	1 749.9	0.81	0.99
S-PC-D2	1 906.2	1 502.1	1 884.7	0.79	0.99
S-PC-D3	1 932.7	1 519.0	2 003.0	0.79	1.04
S-PC-E1	4 273.4	4 065.7	4 118.3	0.95	0.96
S-PC-E3	1 282.5	855.5	1 308.2	0.67	1.02
S-PC-J1 ^[7]	1 631.3	1 577.1	1 311.1	0.97	0.80
S-PC-J2 ^[7]	1 642.7	1 587.3	1 384.9	0.97	0.84

对于开裂弯矩,由表 6 可知,按规范公式(4)计算的仿真和文献^[7]中试件的开裂弯矩计算结果与仿真/试验结果比值的均值分别为 0.84 和 0.90,采用修正公式(11)的计算结果与仿真/试验结果比值

的均值分别为 0.91 和 0.95。由此可知,式(11)计算值的准确度较规范公式(4)有一定程度的提高。

对于极限弯矩,由表 7 可知,按规范公式(12)计算的极限弯矩计算结果与仿真/试验结果比值的均值分别为 0.79 和 0.97,采用修正公式(15)的计算结果与仿真/试验结果比值的均值分别为 0.98 和 0.82。因此,式(15)相较于规范公式(12)在避免求解超越方程的同时,其计算值仍有较高的准确度。

4 结论

通过数值仿真与理论分析,对可伸缩钢筋笼灌注桩的压弯性能进行研究,主要结论如下:

1)采用 ABAQUS 有限元软件对文献[7]中的试验试件进行数值分析,分析结果与试验结果吻合良好,表明有限元模型可用于分析此类可伸缩钢筋笼灌注桩(S-PC 桩)的压弯承载性能。

2)通过仿真结果对比发现,等强度配筋下无预应力 S-PC 桩和 RC 桩的抗裂性能及压弯承载能力差异不大,前者的延性高于后者,表明此类 S-PC 桩较常规 RC 桩具有更好的施工便捷性,受力性能基本相同。

3)参数分析结果表明,随着纵筋配筋率的增大(0.22% 增至 0.65%),S-PC 桩的极限弯矩随之增大(提高幅度 73%),开裂弯矩变化较小(仅增大 6%);当纵筋配筋率合适时,S-PC 桩的延性随着纵筋配筋率的增大而提高,但超过一定限度后其延性反而有所降低。此外,随着纵筋预拉力的增大(50 kN 增至 150 kN),S-PC 桩的开裂弯矩随之增大(提高幅度 10%),桩的延性系数显著减小(降低幅度 60%),极限弯矩变化不明显(仅增大 3%)。随着轴压比的提高,S-PC 桩的抗裂性能和压弯承载力显著增大,同时延性显著降低。另一方面,随着轴拉比的提高,S-PC 桩的开裂弯矩和极限弯矩逐渐减小,但延性呈现出先增大后减小的趋势。在数值计算工况中,箍筋间距和混凝土强度对 S-PC 桩的抗裂性能和压弯承载能力影响较小。

4)对《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)的混凝土截面开裂弯矩和极限弯矩公式进行修正,建立了 S-PC 桩截面的开裂弯矩和极限弯矩修正公式。开裂弯矩修正公式较规范公式的计算结果与仿真/试验结果更为接近,极限弯矩修正公式相较于规范公式在避免求解超越方程的同时,其计算值仍有较高的准确度。

参考文献

[1] 王卫东,高文生,龚维明,等.基础工程技术的发展与

创新[J]. 土木工程学报, 2025, 58(2): 97-117.

Wang W D, Gao W S, Gong W M, et al. Development and innovation of technologies in foundation engineering [J]. China Civil Engineering Journal, 2025, 58(2): 97-117. (in Chinese)

[2] 李湛,李钦锐,李兆明.历史建筑地下空间拓展工程[J]. 地下空间与工程学报, 2022, 18(3): 714-723.

Li Z, Li Q R, Li Z M. Underground space expansion project of a historical building [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2022, 18(3): 714-723. (in Chinese)

[3] 卜发东,宋义仲,李建明,等.水泥石复合管桩复合地基技术及应用[J]. 山东建筑大学学报, 2017, 32(3): 276-283.

Bu F D, Song Y Z, Li J M, et al. Technology of pipe pile embedded in cement soil composite foundation and its application [J]. Journal of Shandong Jianzhu University, 2017, 32(3): 276-283. (in Chinese)

[4] 贾强,应惠清,张鑫.锚杆静压桩技术在既有建筑物增设地下空间中的应用[J]. 岩土力学, 2009, 30(7): 2053-2057, 2090.

Jia Q, Ying H Q, Zhang X. Construction of basement in existing buildings by static bolt-pile [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(7): 2053-2057, 2090. (in Chinese)

[5] 孙友良.树根桩在地基基础加固中的应用研究[D]. 南京: 河海大学, 2006.

Sun Y L. Research on the application of small diameter bored injection pile in foundation consolidation [D]. Nanjing: Hohai University, 2006. (in Chinese)

[6] 山野辺慎一,河野哲也,中井督介.ストランドを軸方向鋼材に用いた場所打ち杭における伸縮式鉄筋かごの機構とその特性[J]. 土木学会論文集 E2(材料・コンクリート構造), 2018, 74(3): 207-217.

YAMANOBÉ S, KONO T, NAKAI T. Deployable reinforcement cage for cast-in concrete piles using strands as longitudinal reinforcement [J]. Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. E2 (Materials and Concrete Structures), 2018, 74(3): 207-217. (in Japanese)

[7] 山野辺慎一,河野哲也,曾我部直樹,等.ストランドを軸方向鋼材に用いた杭部材の曲げに対する特性と設計法[J]. 土木学会論文集 E2(材料・コンクリート構造), 2019, 75(2), 80-94.

YAMANOBÉ S, KONO T, SOGABÉ N, et al. Flexure properties and design method of concrete piles using strands as longitudinal reinforcement [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers E2 (Materials and Concrete Structures), 2019, 75(2): 80-94. (in Japanese)

[8] 李明睿,陈国平,范秀江,等.盾构施工对临近桩基影响的数值模拟及参数分析[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2022, 44(1): 45-52.

- Li M R, Chen G P, Fan X J, et al. Numerical study and parametric analysis of influence of tunnel excavation on adjacent pile foundation [J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2022, 44(1): 45-52. (in Chinese)
- [9] 刘逸敏, 姚文娟, 张效忠, 等. 高桩承台桩基波浪受力分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2014(1): 68-73, 100.
- Liu Y M, Yao W J, Zhang X Z, et al. Analysis of wave loads on the grouping pile foundation with slab merged in water [J]. Journal of Civil, Architectural and Environmental Engineering, 2014(1): 68-73, 100. (in Chinese)
- [10] 丁选明, 巫崇荣, 瞿立明, 等. 斜坡地形单桩竖向承载特性模型试验与数值模拟研究[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2020, 42(3): 1-9.
- Ding X M, Wu C R, Qu L M, et al. Model test and numerical simulation of vertical bearing capacity for single pile in slope [J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2020, 42(3): 1-9. (in Chinese)
- [11] GB 50010—2010 混凝土结构设计规范[S].
- GB 50010—2010 Code for design of concrete structures [S]. (in Chinese)
- [12] JGJ 120—2012 建筑基坑支护技术规程[S].
- JGJ 120—2012 Technical specification for retaining and protection of building foundation excavations [S]. (in Chinese)
- [13] 广州市市政工程试验检测有限公司. 一种伸缩式钢筋笼装配系统及装配方法: CN202410495140.4 [P]. 2024-12-13.
- Guangzhou Municipal Engineering Testing Co., Ltd. A scalable reinforced cage assembly system and assembly method: CN202410495140.4 [P]. 2024-12-13. (in Chinese)
- [14] An C, Castello X, Duan M L, et al. Ultimate strength behaviour of sandwich pipes filled with steel fiber reinforced concrete [J]. Ocean Engineering, 2012, 55: 125-135.
- [15] Genikomsou A S, Polak M A. Finite element analysis of punching shear of concrete slabs using damaged plasticity model in ABAQUS [J]. Engineering Structures, 2015, 98: 38-48.
- [16] 冯鹏, 强翰霖, 叶列平. 材料、构件、结构的“屈服点”定义与讨论[J]. 工程力学, 2017, 34(3): 36-46.
- Feng P, Qiang H L, Ye L P. Discussion and definition on yield points of materials, members and structures [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(3): 36-46. (in Chinese)
- [17] 陈升平, 田晓蓉. 混凝土截面抵抗矩塑性影响系数的理论分析[J]. 湖北工业大学学报, 2006, 21(6): 35-36, 54.
- Chen S P, Tian X R. Theoretical analysis of the plastic influence coefficient of concrete under bending moment [J]. Journal of Hubei University of Technology, 2006, 21(6): 35-36, 54. (in Chinese)
- [18] 顾冬生, 吴刚, 吴智深. RC 圆柱受弯承载力极限值计算方法研究[J]. 工程力学, 2012, 29(8): 227-235.
- Gu D S, Wu G, Wu Z S. Calculation of the ultimate flexural capacity of normal section of rc circular columns [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(8): 227-235. (in Chinese)

(编辑 XXX)